

# Нелинейно-дисперсионные модели волновой гидродинамики: иерархия моделей, повышение точности, численные алгоритмы

З. И. ФЕДОТОВА\*, Г. С. ХАКИМЗЯНОВ

Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Федотова Зинаида Ивановна, e-mail: [zf@ict.nsc.ru](mailto:zf@ict.nsc.ru)

Поступила 04 апреля 2023 г., доработана 20 апреля 2023 г., принята в печать 27 апреля 2023 г.

Изложены результаты исследования нелинейно-дисперсионных моделей и численных методов их реализации с точки зрения иерархического подхода, полученные в последнее десятилетие в ФИЦ ИВТ. На примере разностной схемы предиктор-корректор, аппроксимирующей уравнения нелинейно-дисперсионных моделей, продемонстрированы способы исследования численных алгоритмов для моделей повышенной точности.

*Ключевые слова:* длинные поверхностные волны, неровное дно, нелинейно-дисперсионные уравнения, иерархия моделей, дисперсионное соотношение, фазовая скорость, закон Грина, анализ диссипации и дисперсии разностных схем.

*Цитирование:* Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные модели волновой гидродинамики: иерархия моделей, повышение точности, численные алгоритмы. Вычислительные технологии. 2023; 28(3):41–59. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.004.

## Введение

Поведение поверхностных волн на воде с давних пор привлекает внимание как инженеров, проектирующих прибрежные сооружения с учетом возможных рисков, так и теоретиков, занимающихся проблемами гидродинамики гравитационных волн на воде. Одной из первых монографий, посвященных детальному изучению этого вопроса, является книга Дж.Дж. Стокера, 1957 [1], в которой также содержится обширная библиография более ранних работ. В Сибирском отделении Академии наук СССР, основанном в 1957 г., в числе первых был создан Институт гидродинамики, где сформировался научный коллектив, занимающийся математическими задачами поведения поверхностных и внутренних волн. В монографиях [2, 3] приведен целый ряд новых авторских результатов, а также даны многочисленные ссылки на статьи российских и зарубежных исследователей, что позволяет увидеть интерес к задачам о поведении разномасштабных волн на воде.

Коллектив научной школы Ю.И. Шокина начал изучение моделей распространения волн на мелкой воде и создание численных алгоритмов их реализации в 70-х гг. прошлого столетия [4], успешно продолжил их в 80-х гг. [5], а с 1991 г. эти работы активно развиваются в ФИЦ ИВТ. Монография [6] отражает ряд результатов, полученных к 2000 г. Переходя к задачам настоящего времени, подчеркнем, что состояние

современных исследований характеризуется тем, что как ранее, так и сейчас для численного моделирования гидродинамических процессов в диапазоне длинных и средних волн преимущественно используются модели, которые описывают волновые режимы для осредненных по вертикали характеристик при малых значениях параметра дисперсии  $\mu = d/\lambda$ , где  $d$  и  $\lambda$  — средние значения глубины акватории и длины волны соответственно. Это так называемые модели “мелкой воды”, область применимости которых связана с порядком  $O(\mu^n)$  ( $n = 2, 4, \dots$ ) длинноволнового приближения, т. е. с порядком аппроксимации полных уравнений Эйлера несжимаемой жидкости. Расширение круга задач, связанных с освоением прибрежных территорий, стимулирует как усовершенствование существующих, так и создание новых моделей [7, 8], а это, ввиду разнообразия приемов и упрощающих предположений, приводит к многообразию соответствующим этим моделям систем дифференциальных уравнений. Целью ряда работ, выполняемых в ФИЦ ИВТ, является формирование единообразного подхода к разработке иерархической структуры уравнений мелкой воды различных приближений, в которой обеспечивается преемственность физически содержательных свойств между различающимися по сложности моделями, принадлежащими разным уровням иерархии [9–11]. Значительные усилия были направлены на исследование нелинейно-дисперсионных (НЛД-) моделей гидродинамики, занимающих в иерархии длинноволновых моделей промежуточное место между полной моделью трехмерного течения и классической бездисперсионной (NSWE-) моделью мелкой воды.

Быстро развивающийся в последние десятилетия класс НЛД-моделей и его расширение за счет разнообразных усовершенствований и упрощений привели к разработке базовой модели [9], на основе которой были построены иерархические цепочки вложенных друг в друга математических моделей мелкой воды на вращающейся сфере и на плоскости, обладающих балансовыми соотношениями одинаковой структуры, схожей со структурой уравнений газовой динамики. Вывод базовой модели отталкивается от уравнений Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере, при этом учитывается подвижность донной поверхности, а дальнейший переход по иерархии от полностью нелинейных уравнений с дисперсией в сторону упрощения происходит с наследованием важнейших свойств, в частности с сохранением балансовых соотношений и инвариантности относительно преобразования Галилея. Основные результаты проведенных исследований опубликованы в монографиях [10, 11].

Следующий круг работ связан с модификацией моделей мелкой воды для достижения повышенного порядка точности фазовых характеристик, что позволило, в частности, получить ряд уточняющих формул для изменения амплитуды, длины и крутизны волны при ее выходе из глубоководной зоны на шельф [12–15].

Ввиду нелинейности и сложной структуры НЛД-моделей незаменимым инструментом их реализации является численное моделирование. Сложилась ситуация, когда развитие вычислительных методов решения задач в рамках НЛД-моделей и исследование их важнейших характеристик существенно отстали от разработки и усовершенствования самих моделей. Дело в том, что НЛД-уравнения содержат смешанные производные высокого порядка по времени и пространственным координатам и тем самым не являются системами уравнений типа Коши–Ковалевской, что препятствует прямому распространению на них хорошо зарекомендовавших себя численных методов, разработанных для систем гиперболического типа [16]. В работах [17–20] предпринята попытка заполнить ряд пробелов, имеющих в данной области, в частности представлен аналитический обзор конечно-разностных методов, вместе с примыкающим к нему методом

конечных объемов, так как именно эти численные методы показали свою работоспособность при решении нелинейных уравнений мелкой воды различного длинноволнового приближения в случае подвижного неровного дна [10, 11].

Оказалось, что благодаря наличию в НЛД-моделях балансовых соотношений одинаковой структуры можно применить иерархический подход и к построению разностных схем. В настоящей работе для SGN-модели Серре – Грина – Нагди [11, 21, 22], одной из самых известных в иерархии длинноволновых дисперсионных моделей, и ее модификации (mSGN-модель), обладающей улучшенными фазовыми характеристиками, приведена разностная схема типа предиктор-корректор, специфика которой состоит в том, что она основана на расщеплении исходной системы НЛД-уравнений на гиперболическую систему и скалярное уравнение эллиптического типа [23]. Представлены результаты диссипативного и дисперсионного анализа разностной схемы, получены условия ее устойчивости и оценки для фазовой ошибки.

## 1. Иерархия моделей

В работах [9–11] сформулирован единообразный подход к построению длинноволновых моделей гидродинамики и осуществлено построение иерархических цепочек уравнений мелкой воды первого и второго приближений, обладающих преемственностью физически содержательных свойств. Вывод моделей мелкой воды отталкивается от уравнений Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере, при этом учитывается подвижность донной поверхности. Важно, что иерархия по вертикали стартует от полностью нелинейных уравнений с дисперсией и движется в сторону упрощенных моделей с наследованием важнейших свойств. Переход от сферической геометрии к плоской осуществляется за счет предельного перехода к “окрестности” на сфере, при этом возникает новая вертикальная цепочка моделей на плоскости. Можно сказать, что каждая модель в иерархии может генерировать собственную цепочку, образующуюся по мере упрощающих предположений. Важно, что все уравнения, включенные в иерархию, как на сфере, так и на плоскости записываются в универсальной компактной форме, структурно совпадающей с системой уравнений газодинамики. Иерархический подход выполняет классификацию многообразного семейства длинноволновых моделей с возможностью их сравнительного анализа. Кроме того, он позволяет строить новые модели с набором нужных свойств.

В настоящей работе для одной из наиболее известных моделей второго длинноволнового приближения  $O(\mu^2)$  иерархической цепочки на плоскости рассмотрено улучшение ее свойств в сторону повышения точности фазовых характеристик. Речь пойдет о SGN-модели, на базе которой, благодаря модификации негидростатической части давления, удалось построить новые модели, обеспечивающие четвертый, шестой и восьмой порядки точности аппроксимации дисперсионного соотношения трехмерной модели потенциального течения, далее используемой в качестве “эталонной” и именуемой FNPF-моделью.

### 1.1. Модели повышенной точности

В рассматриваемых НЛД-моделях искомыми величинами являются полная глубина  $H(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) + \eta(\mathbf{x}, t)$  и вектор скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  — средняя по толщине слоя воды горизонтальная составляющая  $\mathbf{U}$  вектора скорости трехмерного течения идеальной

несжимаемой жидкости в слое, ограниченном снизу подвижным дном  $y = -h(\mathbf{x}, t)$ , а сверху — свободной границей  $y = \eta(\mathbf{x}, t)$ . Здесь  $t$  — время;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2, y)$  — координаты точки в декартовой системе координат  $Ox_1x_2y$ , ось  $Oy$  которой направлена вертикально вверх, а координатная плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с невозмущенной поверхностью воды.

Запишем НЛД-модель второго длинноволнового приближения в компактной квази-дивергентной форме

$$\begin{aligned} H_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u}) &= 0, \\ (H\mathbf{u})_t + \nabla \cdot (H\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= \check{p}\nabla h, \end{aligned} \quad (1.1)$$

при этом давление  $p$  и давление на дне  $\check{p}$  определяются формулами

$$p = g\frac{H^2}{2} - \left( \frac{H^3}{3}R_1 + \frac{H^2}{2}R_2 \right), \quad \check{p} = gH - \left( \frac{H^2}{2}R_1 + HR_2 \right),$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= D(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 - \beta \nabla \cdot \mathbf{I}, \quad R_2 = D^2h - \beta \mathbf{I} \cdot \nabla h, \\ \mathbf{I} &= \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + g\nabla\eta, \end{aligned}$$

$D$  — оператор полной производной по времени, символом  $\otimes$  обозначено тензорное произведение векторов. Выписанную НЛД-модель будем называть mSGN-моделью, при  $\beta = 0$  получаем SGN-модель.

В работе [13] выведена следующая в этой иерархической цепочке mSGN4-модель четвертого длинноволнового приближения  $O(\mu^4)$ , которая содержит производные пятого порядка и имеет более громоздкий по сравнению с mSGN-моделью вид, поэтому ниже будет приведена только линеаризованная форма mSGN4-модели.

## 1.2. Дисперсионный анализ

Аналитическое исследование полностью нелинейных НЛД-моделей удастся провести лишь в редких случаях (см., например, [24–26]). В то же время переход к упрощенным формулировкам позволяет точно описать некоторые свойства исходных моделей (например, их дисперсионные характеристики), а также в ряде случаев обеспечивает удовлетворительный прогноз волнообразования, в частности, в прибрежной зоне.

Ограничимся изучением линеаризованных формулировок, предположив, что форма дна является стационарной и слабо изменяющейся в том смысле, что вторые и более высокого порядка производные функции  $h(\mathbf{x})$ , а также всевозможные произведения производных этой функции пренебрежимо малы. Если предположить, что волны движутся в направлении к прямолинейной береговой линии перпендикулярно прямолинейным изобатам, то можно рассматривать однонаправленное течение над неровным дном  $h = h(x)$ , где  $x = x_1$ . При этих условиях уравнение неразрывности (1.1) примет вид

$$\eta_t + (hu)_x = 0.$$

Линеаризованное уравнение движения для одномерной mSGN4-модели запишем следующим образом [15]:

$$u_t + g\eta_x + hh_x r_{2,x} + \frac{h^2}{3}r_{2,xx} + \frac{2h_x h^3}{9}r_{4,xxx} + \frac{h^4}{45}r_{4,xxxx} = 0, \quad (1.2)$$

где

$$r_2 = (\beta_1 - 1)u_t + \beta_1 g \eta_x, \quad (1.3)$$

$$r_4 = (\beta_0 - 5\beta_1 - 1)u_t + \beta_0 g \eta_x, \quad (1.4)$$

$\beta_0, \beta_1$  — параметры, участвующие в модификации формул для давления при выводе этой модели. Из вида (1.2) получаем уравнения движения mSGN-модели при  $r_4 \equiv 0$ ,  $\beta_1 = \beta$ , SGN-модели при  $r_4 \equiv 0$ ,  $\beta = 0$  и NSWE-модели при  $r_2 \equiv 0$ ,  $r_4 \equiv 0$ . Здесь и далее для линейных моделей используются те же обозначения (FNPF, mSGN4, mSGN и т. д.), что и для нелинейных.

Далее предположим, что над дном слабо изменяющейся формы распространяются волны в виде гармоник с переменной амплитудой

$$\eta(x, t) = a(x)e^{-i(\omega t - K(x))}, \quad u(x, t) = v(x)(1 + i\psi(x))e^{-i(\omega t - K(x))},$$

при этом частота  $\omega$  гармоник постоянна. Здесь  $K_x(x) = k(x)$ ; амплитуда  $a(x)$  и волновое число  $k(x)$ , как и форма дна, являются слабо изменяющимися величинами;  $\psi(x)$  — фазовый сдвиг того же порядка, что и  $h_x$ . В случае горизонтального дна ( $h(x) \equiv d = \text{const}$ ) фазовый сдвиг отсутствует:  $\psi(x) \equiv 0$ , волновое число  $k$  постоянно, как и амплитуды гармоник:  $a(x) \equiv a_0 = \text{const}$ ,  $v(x) \equiv v_0 = \text{const}$ . Для mSGN- и mSGN4-моделей корни дисперсионных уравнений, имеющие смысл частоты, выглядят соответственно следующим образом:

$$\omega = \left[ g d k^2 \frac{1 - \frac{\beta}{3} \zeta^2}{1 + \frac{1 - \beta}{3} \zeta^2} \right]^{1/2}, \quad (1.5)$$

$$\omega = \left[ g d k^2 \frac{1 - \frac{\beta_1}{3} \zeta^2 + \frac{\beta_0}{45} \zeta^4}{1 + \frac{1 - \beta_1}{3} \zeta^2 + \frac{\beta_0 - 5\beta_1 - 1}{45} \zeta^4} \right]^{1/2}. \quad (1.6)$$

Вид формул (1.5) и (1.6) не зависит от формы дна [14] с учетом того, что для горизонтального дна  $\zeta = kd$ , а для слабо изменяющейся формы дна —  $\zeta = k(x)h(x)$ . Фазовая скорость определяется отношением

$$c_p = \omega/k,$$

причем для слабо изменяющейся формы дна  $c_p = c_p(k(x), h(x))$ .

В случае горизонтального дна формулы (1.5), (1.6) позволяют оценить, насколько точно фазовые скорости SGN-, mSGN- и mSGN4-моделей аппроксимируют фазовую скорость “эталонной” FNPF-модели

$$c_{p, \text{FNPF}} = c_0 \left( \frac{\tanh \zeta}{\zeta} \right)^{1/2}, \quad c_0 = (gd)^{1/2}. \quad (1.7)$$

В [12] показано, что при  $\beta = -0.2$  фазовая скорость mSGN-модели аппроксимирует “эталонную” фазовую скорость с точностью  $O(\mu^4)$ , причем mSGN-модель аппроксимирует исходную FNPF-модель лишь с точностью  $O(\mu^2)$ , поэтому mSGN-модель повышенной точности обозначается здесь как mSGN2-4. Двухпараметрическое семейство mSGN4-моделей аппроксимирует FNPF-модель с точностью  $O(\mu^4)$  [13], причем при  $\beta_0 = 1/21$ ,  $\beta_1 = -1/3$  “эталонная” фазовая скорость аппроксимируется с точностью  $O(\mu^8)$  (модель

Выражения для  $r_2$ ,  $r_4$  и значения параметров  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  в последовательности линейных моделей мелкой воды

Expressions for  $r_2$ ,  $r_4$  and values of parameters  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  in a sequence of shallow water linear models

Модель	$r_2$	$r_4$	$\beta_0$	$\beta_1$
mSGN4	(1.3)	(1.4)	$[0, \beta_1(1 + 5\beta_1)]$	$(-\infty, -1/5)$
mSGN4-8	(1.3)	(1.4)	$-1/21$	$-1/3$
mSGN4-6	(1.3)	(1.4)	$0$	$-2/7$
mSGN ( $\beta = \beta_1$ )	(1.3)	$0$	$-$	$(-\infty, 0]$
mSGN2-4	(1.3)	$0$	$-$	$-1/5$
SGN	(1.3)	$0$	$-$	$0$
NSWE	$0$	$0$	$-$	$-$

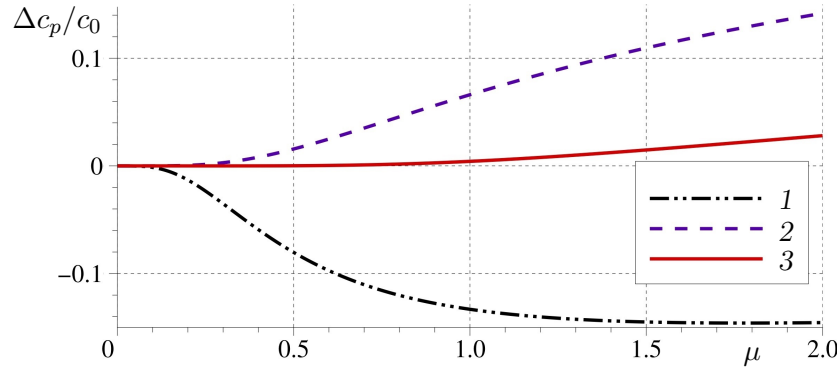


Рис. 1. Отклонение  $\Delta c_p/c_0$  фазовой скорости в дисперсионных моделях от “эталонной” фазовой скорости: SGN (1); mSGN2-4 (2); mSGN4-8 (3). Дно горизонтальное

Fig. 1. Deviation  $\Delta c_p/c_0$  of the phase velocity in dispersion models from the “reference” phase velocity: SGN (1); mSGN2-4 (2); mSGN4-8 (3). The bottom is horizontal

mSGN4-8), при  $\beta_0 = 0$ ,  $\beta_1 = -2/7$  — с точностью  $O(\mu^6)$  (модель mSGN4-6). Определяющие соотношения, допустимые и оптимальные значения параметров для рассматриваемых моделей приведены в таблице. На рис. 1 изображены графики отклонения фазовых скоростей SGN-, mSGN2-4- и mSGN4-8-моделей от “эталонной” фазовой скорости (1.7). Наилучшее приближение к фазовой скорости FNPF-модели показывает mSGN4-8-модель.

В случае слабо изменяющейся формы дна для SGN-, mSGN- и mSGN4-моделей выведены зависимости, показывающие изменение фазовой скорости, амплитуды, длины и крутизны поверхностных волн при их движении из глубоководной части акватории в мелководную [14, 15]. Для примера приведем формулу, полезную при решении практических задач, возникающих при расчетах нагрузок на прибрежные сооружения, когда важно знать амплитуду приходящих со стороны моря волн. Известно, что в рамках бездисперсионной модели мелкой воды рост амплитуды  $a(x)$  волны при ее выходе на мелководье оценивают согласно закону Грина

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}}, \quad 0 < \bar{h} \leq 1, \quad (1.8)$$

где  $\bar{a} = a(x)/a_0$ ,  $\bar{h} = h(x)/h_0$ ,  $a(x)|_{x=x_0} = a_0$ ,  $h(x)|_{x=x_0} = h_0$ . Для набегающих волн средней длины  $\lambda_0$ , описываемых в рамках SGN-модели, удалось получить уточненную формулу

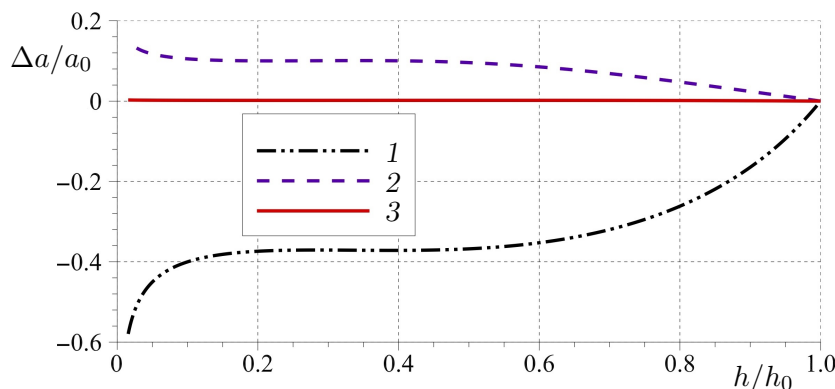


Рис. 2. Отклонение  $\Delta a/a_0$  относительной амплитуды волны в дисперсионных моделях от “эталонной” относительной амплитуды: SGN (1); mSGN2-4 (2); mSGN4-8 (3). Дно переменной формы,  $\mu_0 = 0.5$

Fig. 2. Deviation  $\Delta a/a_0$  of the relative wave amplitude in dispersion models from the “reference” relative amplitude: SGN (1); mSGN2-4 (2); mSGN4-8 (3). The bottom is uneven,  $\mu_0 = 0.5$

$$\bar{a}(\bar{h}) = \frac{1}{\bar{h}^{1/4}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3}\nu_0^2(1 - \bar{h})\right)^{3/4}}, \quad 0 < \bar{h} \leq 1, \quad (1.9)$$

где  $\nu_0 = 2\pi\mu_0$ ,  $\mu_0 = h_0/\lambda_0$ . Сравнивая формулы (1.8) и (1.9), видим, что в последнем случае изменение амплитуды зависит от параметра дисперсии  $\mu_0$ . Аналогичные соотношения получены также для mSGN- и mSGN4-моделей.

На рис. 2 показано отклонение относительной амплитуды волны для моделей SGN, mSGN2-4 и mSGN4-8 от “эталонной”, которая вычисляется по формуле [15]

$$\bar{a}(\bar{h}) = \left( \frac{2\nu_0 + \sinh(2\nu_0)}{\cosh^2(\nu_0)} \cdot \frac{\cosh^2(\nu\bar{h})}{2\nu\bar{h} + \sinh(2\nu\bar{h})} \right)^{1/2}, \quad 0 < \bar{h} \leq 1,$$

где  $\nu$  — корень уравнения  $\nu \tanh(\nu\bar{h}) = \nu_0 \tanh(\nu_0)$ . Видно, что относительные амплитуды для mSGN4-8- и “эталонной” моделей визуально неразличимы. Значительное отклонение результата, полученного по SGN-модели, связано с ее более узкой областью применимости:  $\mu_0 \leq 0.2$ . Отклонение амплитуды для mSGN2-4-модели от “эталонной” можно считать приемлемым для  $\mu_0 \leq 0.5$ .

Результаты сравнительного анализа свойств SGN-, mSGN-, mSGN4-моделей [14, 15] показали, что модель четвертого порядка длинноволнового приближения с восьмым порядком точности дисперсионного соотношения обеспечивает наилучшую аппроксимацию рассмотренных характеристик “эталонной” модели в случае как горизонтального дна, так и неровного.

## 2. Численные алгоритмы для решения НЛД-уравнений

Численные методы на основе НЛД-моделей разрабатывались по мере развития и усовершенствования самих моделей. Так, в работе [27] одновременно с выводом НЛД-уравнений, учитывающих изменение формы дна, предложена первая разностная схема, аппроксимирующая эти уравнения. К 70-м годам прошлого столетия уже имелось множество методов для численного решения систем эволюционных дифференциальных уравнений. Были не только развиты вычислительные алгоритмы для решения таких

уравнений, но и созданы соответствующие теории, связанные с именами таких математиков, как П. Лакс, С.К. Годунов, Г.И. Марчук, А.А. Самарский, Н.Н. Яненко и др. В работах Ю.И. Шокина, Н.Н. Яненко и их учеников был разработан метод дифференциальных приближений для анализа диссипации и дисперсии разностных схем. Одно из достоинств этого метода заключено в возможности применять его к нелинейным уравнениям [28, 29].

Уравнения мелкой воды, не учитывающие дисперсию, формально можно рассматривать как частный случай уравнений газодинамики для политропного газа, поэтому к ним удастся применить всю теорию и численные методы для систем уравнений гиперболического типа [16]. Переход к построению численных методов длинноволновых уравнений мелкой воды второго порядка потребовал специальных подходов. Причина в том, что система уравнений НЛД-модели не является системой типа Коши–Ковалевской, так как содержит смешанные производные третьего порядка по времени и пространственным переменным. Тем не менее, благодаря наличию в иерархии моделей балансовых соотношений одинаковой структуры, схожей со структурой уравнений газовой динамики, удастся и в случае НЛД-моделей использовать алгоритмы, основанные на хорошо изученных численных методах газовой динамики.

В [23] для SGN-модели предложено ввести новую переменную, являющуюся проинтегрированной по глубине дисперсионной составляющей давления, что позволило перейти к расширенной системе уравнений, состоящей из системы уравнений гиперболического типа и скалярного эллиптического уравнения для этой переменной. В работах [19, 20] для такой расширенной системы уравнений предложены разностные схемы типа предиктор-корректор, которые успешно применяются для расчета течений с поверхностными волнами на плоскости и сфере [11].

Ниже будут рассмотрены схема предиктор-корректор на разнесенной сетке для SGN-модели и ее модификации — mSGN-модели. Построение разностной схемы для модели mSGN4-8, содержащей пятые производные, требует дополнительных приемов, и эта разработка отложена на будущее.

## 2.1. Разностные схемы предиктор-корректор для SGN-, mSGN-моделей

Продemonстрируем метод, предложенный в [23], на примере линеаризованной mSGN-модели, которая при  $\beta = 0$  переходит в SGN-модель. Расширенная система уравнений для mSGN-модели имеет вид

$$\eta_t + du_x = 0, \quad u_t + g\eta_x = \frac{\varphi_x}{d}, \quad (2.1)$$

$$(1 - \beta)\varphi_{xx} - \frac{\varphi}{\nu} = c_0^2\eta_{xx}, \quad \nu = \frac{d^2}{3}. \quad (2.2)$$

Такая запись mSGN-модели позволяет рассматривать для переменных  $\eta$ ,  $u$  гиперболическую систему (2.1) с правой частью и “эллиптическое” уравнение (2.2) для нахождения  $\varphi$ . Для решения этих частей полученной системы уравнений годятся многие известные конечно-разностные методы. Будем использовать разностную схему предиктор-корректор, хорошо зарекомендовавшую себя при решении гиперболических уравнений, дополнив ее отдельным шагом для решения “эллиптического” уравнения [10].

Вычисления начинаются с решения на каждом слое по времени  $t = t^n$  следующего уравнения для  $\varphi$ :

$$(1 - \beta)\varphi_{\bar{x}\bar{x},j}^n - \frac{\varphi_j^n}{\nu} = c_0^2\eta_{\bar{x}\bar{x},j}^n, \quad (2.3)$$



где  $\varphi_{\bar{x}x}$ ,  $\eta_{\bar{x}x}$  — вторые разностные производные на симметричном трехточечном шаблоне равномерной сетки с шагом  $\Delta x$  по переменной  $x$ ,  $t^n = n\tau$ ,  $\tau$  — шаг по времени. На шаге предиктор находятся значения искомым величин в центрах ячеек:

$$\frac{\eta_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(\eta_{j+1}^n + \eta_j^n)}{\tau^*} + d \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{u_{j+1/2}^* - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\tau^*} + g \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_j^n}{\Delta x} = \frac{1}{d} \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{\Delta x},$$

$$(1 - \beta)\varphi_{\bar{x}x,j+1/2}^* - \frac{\varphi_{j+1/2}^*}{\nu} = c_0^2 \eta_{\bar{x}x,j+1/2}^*, \quad (2.5)$$

где  $\tau^* = \tau(1 + \theta_{j+1/2}^n)/2$ ,  $\theta_{j+1/2}^n$  — схемный параметр. Далее выполняется шаг корректор:

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\tau} + d \frac{u_{j+1/2}^* - u_{j-1/2}^*}{\Delta x} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + g \frac{\eta_{j+1/2}^* - \eta_{j-1/2}^*}{\Delta x} = \frac{1}{d} \frac{\varphi_{j+1/2}^* - \varphi_{j-1/2}^*}{\Delta x}.$$

При  $\theta = O(\Delta x)$  рассматриваемая схема имеет второй порядок аппроксимации. Параметр  $\theta_{j+1/2}^n$  выбирается так, чтобы решения уравнений (2.4), (2.6) обладали TVD-свойством [30].

Для исследования разностной схемы (2.3)–(2.6) в случае  $\theta = \text{const}$  рассмотрим ее решения в виде гармоник

$$\eta_j^n = A_0 \rho^n e^{ij\xi}, \quad u_j^n = U_0 \rho^n e^{ij\xi}, \quad \varphi_j^n = \Phi_0 \rho^n e^{ij\xi}, \quad \varphi_{j+1/2}^* = \Phi_0^* \rho^n e^{i(j+1/2)\xi}, \quad \xi = k\Delta x,$$

подстановка которых в разностные уравнения приводит к алгебраической системе уравнений относительно амплитуд гармоник. Условие существования ненулевых решений этой системы дает формулы для множителя перехода разностной схемы

$$\rho = 1 - 2(1 + \theta)c_0^2 \varkappa^2 K s^2 \pm i c_0 \varkappa \sqrt{K} \sin \xi \quad (2.7)$$

и модуля множителя перехода

$$|\rho| = \left[ 1 - 4c_0^2 \varkappa^2 K z (\theta + z - c_0^2 \varkappa^2 (1 + \theta)^2 K z) \right]^{1/2}, \quad z = s^2, \quad z \in [0, 1], \quad (2.8)$$

где

$$\xi \in [0, \pi], \quad s = \sin \frac{\xi}{2}, \quad \varkappa = \frac{\tau}{\Delta x}, \quad K = \frac{1 - \beta \mathcal{D} s^2}{1 + (1 - \beta) \mathcal{D} s^2} > 0, \quad \mathcal{D} = \frac{4\delta^2}{3}, \quad \delta = \frac{d}{\Delta x},$$

параметр  $\delta$  характеризует разрешимость сетки (по отношению к характерной глубине  $d$ ).

На рис. 3 приведен график зависимости модуля множителя перехода схемы предиктор-корректор от переменной  $\xi$  и параметра  $\beta$ . Видно, что на длинных волнах (при малых  $\xi$ ) параметр  $\beta$  практически не влияет на подавление гармоник. На коротких волнах значения  $|\rho|$  для mSGN-схемы (схемы (2.3)–(2.6)) при  $\beta < 0$  меньше, чем для SGN-схемы (mSGN-схемы при  $\beta = 0$ ).

## 2.2. Устойчивость и диссипативные свойства

Исследование свойств модуля множителя перехода позволяет получить ряд важнейших характеристик разностной схемы, которые описывают область входящих в нее параметров, обеспечивающих устойчивый расчет и точность воспроизведения решения аппроксимируемой дифференциальной задачи.

Необходимым условием устойчивости является выполнение неравенства

$$|\rho| \leq 1 \quad \forall z \in [0, 1], \quad (2.9)$$

которое требуется преобразовать в эквивалентное ограничение на число Куранта  $c_0 \varepsilon$ . Исследование устойчивости разностной схемы (2.3)–(2.6) является довольно сложной задачей из-за того, что выражение (2.8) содержит четыре параметра:  $c_0 \varepsilon > 0$ ,  $\theta$ ,  $\delta > 0$  и  $\beta \leq 0$ . Учитывая малость схемного параметра  $\theta$ , удалось показать, что при  $\beta < 0$  условие (2.9) эквивалентно выполнению неравенства

$$c_0 \varepsilon \leq \frac{2\delta\sqrt{\theta/3} + \sqrt{1 + 4\delta^2\beta\theta/3}}{1 + \theta} \quad (2.10)$$

при дополнительном ограничении

$$0 \leq \theta < -\frac{3}{4\delta^2\beta(1 - \beta)} = \theta_0, \quad \beta < 0.$$

При  $\beta \rightarrow 0$  неравенство (2.10) переходит в условие устойчивости SGN-схемы [19].

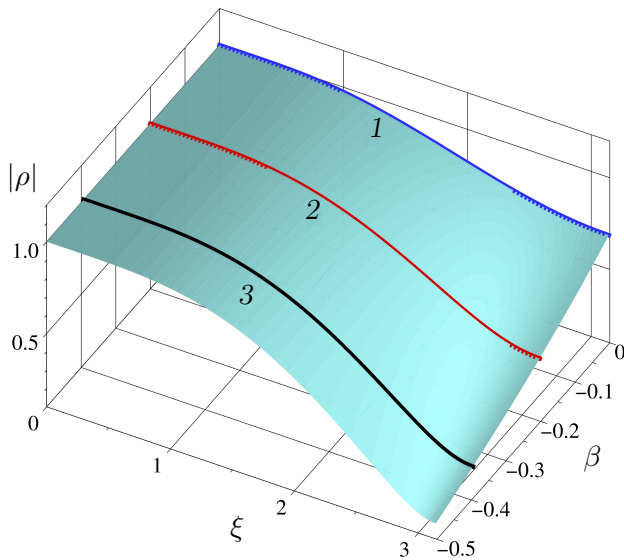


Рис. 3. Модуль множителя перехода  $|\rho(\xi, \beta)|$  схемы предиктор-корректор при  $\theta = 0$ ,  $c_0 \varepsilon = 1$ ,  $\delta = 2$ . Кривые 1–3 соответствуют значениям  $\beta = 0, -0.2, -0.393$

Fig. 3. Modulus of the transition factor  $|\rho(\xi, \beta)|$  of the predictor-corrector scheme for  $\theta = 0$ ,  $c_0 \varepsilon = 1$ ,  $\delta = 2$ . Curves (1)–(3) correspond to the values  $\beta = 0, -0.2, -0.393$

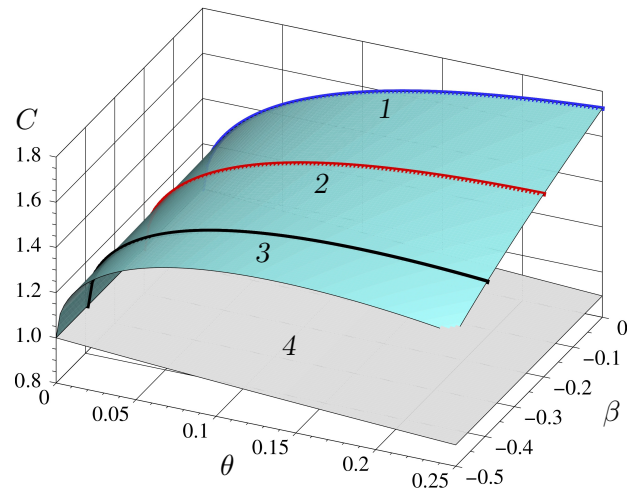


Рис. 4. Верхняя граница  $C = c_0 \varepsilon(\theta, \beta)$  области устойчивости схемы предиктор-корректор при  $\delta = 2$ . Кривые 1–3 соответствуют значениям  $\beta = 0, -0.2, -0.393$ ; 4 — график верхней границы  $C = c_0 \varepsilon(\theta)$  области устойчивости схемы предиктор-корректор для NSWЕ-модели

Fig. 4. The upper bound  $C = c_0 \varepsilon(\theta, \beta)$  of the stability region of the predictor-corrector scheme at  $\delta = 2$ . Curves 1–3 correspond to the values  $\beta = 0, -0.2, -0.393$ ; 4 — graph of the upper bound  $C = c_0 \varepsilon(\theta)$  of the stability domain of the predictor-corrector scheme for the NSWЕ model

На рис. 4 изображены графики верхней границы области устойчивости схемы предиктор-корректор, применяемой для решения задач в рамках как бездисперсионной NSWЕ-модели, так и дисперсионных SGN- и mSGN-моделей. Видно, что при  $\theta > 0$  наиболее ограничительным является условие устойчивости  $c_0 \varepsilon \leq 1/\sqrt{1 + \theta}$  для схемы, аппроксимирующей NSWЕ-уравнения, которая требует проведения расчетов с числами Куранта, меньшими единицы. Для дисперсионных моделей условие устойчивости разностных схем оказывается менее жестким, что также было отмечено в более ранних работах для других явных разностных схем (см., например, [17]). Из формулы (2.10) (см. также расположение кривых 1–3 на рис. 4) следует, что условие устойчивости схемы предиктор-корректор является более ограничительным для mSGN-модели ( $\beta < 0$ ) по сравнению с условием для схемы, аппроксимирующей SGN-модель ( $\beta = 0$ ), при этом в обоих случаях допускаются значения чисел Куранта, превышающие единицу.

В [29] разработана теория исследования устойчивости разностных схем методом первого дифференциального приближения (ДП). Понятие ДП разностной схемы связано с ее дифференциальным представлением, которое является дифференциальным уравнением бесконечного порядка и возникает, если разностные операторы сдвига, продолженные на пространство функций непрерывного аргумента, заменяются их разложениями в ряды по степеням малого параметра сдвига. Оставив в дифференциальном представлении конечное число последовательных членов, получают уравнение, называемое дифференциальным приближением. Дифференциальное приближение несет в себе информацию как об аппроксимируемом уравнении, так и о разностной схеме и может быть использовано для исследования свойств разностной схемы, в том числе ее диссипативных и дисперсионных характеристик с привлечением гармонического анализа.

Показано [29], что для некоторых семейств разностных схем необходимые условия устойчивости связаны со свойствами первого по порядку отличного от нуля члена в выражении для диссипации  $\chi$ , которая определяется как разность модулей множителей перехода разностной схемы  $\rho$  и аппроксимируемой ею дифференциальной системы уравнений  $\Omega$ . Рассматриваемые нелинейно-дисперсионные модели не содержат диссипативных членов, поэтому  $|\Omega| \equiv 1$ , тогда как в исследуемой разностной схеме диссипация присутствует и при малых  $\xi$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi = c_0^2 \varepsilon^2 \theta \frac{\xi^2}{2} + c_0^2 \varepsilon^2 \left[ 1 - b - \frac{1 + 4\delta^2}{3} \theta \right] \frac{\xi^4}{8} - c_0^2 \varepsilon^2 \delta^2 \left[ 3 - 6b - 2\theta - 4\theta(1 - \beta)\delta^2 \right] \frac{\xi^6}{72} - \\ - c_0^2 \varepsilon^2 \left[ (1 - b) \left( 1 - 3c_0^2 \varepsilon^2 \theta \right) - \frac{\theta}{15} \right] \frac{\xi^6}{48} + O(\xi^8), \quad b = c_0^2 \varepsilon^2 (1 + 2\theta). \end{aligned} \quad (2.11)$$

При  $\theta \neq 0$  метод первого ДП [29] дает необходимое условие устойчивости  $\theta > 0$ , вытекающее из (2.11). Если  $\theta = 0$ , то из (2.11) получаем, что для корректности [29] первого ДП должно выполняться ограничение  $c_0 \varepsilon \leq 1$ , совпадающее с (2.10). Если  $\theta \neq 0$ , то условие устойчивости (2.10) зависит от параметров  $\theta$ ,  $\delta$  и  $\beta$ , которые в формуле (2.11) входят в дифференциальное приближение третьего порядка. Отсюда вытекает, что для более полного исследования устойчивости разностной схемы методом ДП требуются дифференциальные приближения более высокого порядка, чем первый.

Так как параметр  $\beta$  не входит в первые члены разложения (2.11), имеющие порядки  $O(\xi^2)$  и  $O(\xi^4)$ , он не оказывает существенного влияния на диссипацию (“аппроксимационную вязкость” [29]) разностной схемы в случае длинных волн. Тем самым проявление диссипации для SGN- и mSGN-схем почти одинаково при малых  $\xi$  (см. рис. 3). Слабая зависимость диссипации схемы от параметра  $\beta$  имеет место не только при малых  $\xi$ , но

и во всей области применимости mSGN-модели ( $\zeta \leq \pi$ ), что видно и из графиков, изображенных на рис. 3 для значения  $\delta = 2$ , при котором неравенство  $\zeta \leq \pi$  равносильно неравенству  $\xi \leq \pi/2$ .

Еще одним свойством разностной схемы, которое определяется поведением  $|\rho|$ , является степень погашения коротковолновых гармоник. Поскольку область применимости mSGN-модели определяется [12] неравенством  $\mu \leq 0.5$ , то воспроизвести детали коротковолнового течения с помощью mSGN-схемы не удастся. Более того, возникающие по ряду причин коротковолновые возмущения необходимо подавлять, так как они не только вызывают появление “нефизических” осцилляций, но и могут быть причиной неустойчивости, особенно в нелинейных задачах. Поэтому разностные схемы, обеспечивающие погашение коротковолновых гармоник, являются более предпочтительными.

Коэффициент затухания гармоник  $|\rho|/|\Omega|$  зависит от четырех параметров ( $\beta$ ,  $\theta$ ,  $c_0\mathcal{D}$ ,  $\delta$ ) и при различных сочетаниях между значениями этих параметров может быть как монотонной, так и немонотонной функцией переменной  $\xi$ . Достаточным условием монотонного убывания коэффициента затухания является следующее ограничение на число Куранта:

$$c_0\mathcal{D} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\theta}}, \quad 0 \leq \theta. \quad (2.12)$$

При выполнении условия (2.12) коротковолновые гармоники подавляются сильнее, чем длинноволновые, что видно и по графикам на рис. 3 в частном случае  $\theta = 0$ .

Рассмотрим отдельно зависимость коэффициента затухания от параметра  $\beta$  в случае самых коротких гармоник, которые может воспроизвести разностная схема, т. е. при  $\lambda = 2\Delta x$  ( $\xi = \pi$ ). Если основываться на практичных предположениях о выборе значений  $\beta \geq -0.5$  и  $\delta \geq 2$ , а также принимая ограничение (2.12), получаем, что для mSGN-схемы коэффициент затухания вычисляется по формуле

$$|\rho| \Big|_{\xi=\pi} = 1 - 2c_0^2\mathcal{D}^2(1+\theta) \frac{1-\beta\mathcal{D}}{1+(1-\beta)\mathcal{D}}$$

и является монотонно возрастающей функцией параметра  $\beta$ , достигая своего максимального значения при  $\beta = 0$ . В частном случае это свойство подтверждается графиками на рис. 3, которые свидетельствуют о том, что наиболее слабое затухание коротких волн происходит при  $\beta = 0$ . Таким образом, по свойству подавления коротковолновых гармоник mSGN-схема ( $\beta < 0$ ) предпочтительнее аналогичной схемы для SGN-модели ( $\beta = 0$ ).

### 2.3. Дисперсионные свойства

Известно [29], что разностная схема как дискретная модель для описания физических явлений может обладать дисперсионными свойствами, которые имеют понятную физическую интерпретацию, отчетливо наблюдаемую при распространении волн. Естественно, что от разностной схемы желательнее потребовать сохранения тех свойств, которыми обладает аппроксимируемая дифференциальная модель. Учитывая повышенный порядок mSGN-модели, надо от аппроксимирующей разностной схемы добиться согласованности “схемной” и “физической” дисперсии и подобрать “схемные” параметры таким образом, чтобы в конечномерной модели порядок приближения фазовых характеристик превосходил формальный порядок аппроксимации.

Изменение фазы множителя перехода разностной схемы (2.3)–(2.6) за один шаг по времени определяется формулой  $\Phi_{\text{pc}} = \arg \rho$ . Выбирая в формуле (2.7) знак “+”, получаем, что в случае длинных волн (малых  $\xi$ ) имеет место выражение

$$\Phi_{\text{pc}} = c_0 \varkappa \xi - c_0 \varkappa \frac{\delta^2}{6} \xi^3 + \frac{c_0 \varkappa}{6} \left( c_0^2 \varkappa^2 (3\theta + 1) - 1 \right) \xi^3 + c_0 \varkappa \xi^5 \times \\ \times \left[ (3 - 4\beta_{\text{pc}}) \frac{\delta^4}{72} - \left( 2c_0^2 \varkappa^2 (3\theta + 1) - 1 \right) \frac{\delta^2}{24} + \frac{c_0^2 \varkappa^2 (1 - 3\theta)}{24} - \frac{c_0^4 \varkappa^4 (7 - 32\theta^2)}{128} + \frac{1}{120} \right] + O(\xi^7).$$

Здесь введено новое обозначение  $\beta_{\text{pc}}$  для параметра  $\beta$  в схеме, поскольку оптимальные значения параметра  $\beta$  в схеме и mSGN-модели могут отличаться. Сравнивая эту формулу с формулой изменения фазы гармоник в mSGN-модели

$$\Phi_{\text{mSGN}} = c_0 \varkappa \xi - c_0 \varkappa \frac{\delta^2}{6} \xi^3 + c_0 \varkappa (3 - 4\beta) \frac{\delta^4}{72} \xi^5 + O(\xi^7), \quad (2.13)$$

получаем следующее выражение для фазовой ошибки:

$$\Delta = \Phi_{\text{pc}} - \Phi_{\text{mSGN}} = \frac{c_0 \varkappa}{6} \left( c_0^2 \varkappa^2 (3\theta + 1) - 1 \right) \xi^3 + c_0 \varkappa \xi^5 \times \\ \times \left[ (\beta - \beta_{\text{pc}}) \frac{\delta^4}{18} - \left( 2c_0^2 \varkappa^2 (3\theta + 1) - 1 \right) \frac{\delta^2}{24} + \frac{c_0^2 \varkappa^2 (1 - 3\theta)}{24} - \frac{c_0^4 \varkappa^4 (7 - 32\theta^2)}{128} + \frac{1}{120} \right] + O(\xi^7).$$

При оптимальном значении  $\beta = -0.2$  изменение фазы длинноволновых гармоник (2.13) в mSGN-модели совпадает вплоть до членов порядка  $O(\xi^5)$  с величиной изменения фазы в модели потенциальных течений

$$\Phi_{\text{ref}} = c_0 \varkappa \xi \sqrt{\frac{\tanh(\xi\delta)}{\xi\delta}} = c_0 \varkappa \xi - c_0 \varkappa \frac{\delta^2}{6} \xi^3 + c_0 \varkappa \frac{19\delta^4}{360} \xi^5 + O(\xi^7).$$

Требование сохранения этого свойства разностной схемой приводит к следующим условиям на параметры разностной схемы:

$$c_0 \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\theta}}, \quad \beta_{\text{pc}} = -0.2 - \frac{0.75}{\delta^2} - \frac{0.9}{\delta^4} \frac{(\theta - 0.5)^2 - 0.15625}{(1 + 3\theta)^2}. \quad (2.14)$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$ , а следовательно,  $\delta \rightarrow \infty$ , получаем, что  $\beta_{\text{pc}} \rightarrow -0.2$ , т. е. в случае длинных волн оптимальное значение параметра  $\beta$  в разностной схеме стремится при измельчении сетки к оптимальному значению в линеаризованной mSGN-модели, что видно и на рис. 5, где изображена поверхность  $\beta_{\text{pc}}(\theta, \delta)$  оптимальных значений (2.14) параметра  $\beta$  mSGN-схемы, рассматриваемая как функция переменных  $\theta$  и  $\delta$ . Видно, что разностная схема и mSGN-модель имеют отличающиеся оптимальные значения параметра  $\beta$ .

На рис. 5 изолинией 2 показана зависимость оптимального значения  $\beta_{\text{pc}}$  от параметра  $\theta$  в частном случае  $\delta = 2$ . При  $\theta = 0$  получаем значение  $\beta_{\text{pc}} = -0.393$ . На рис. 3 и 4 наряду с кривыми 1 и 2, соответствующими значениям  $\beta = 0$  и  $\beta = -0.2$ , приведены кривые 3 для  $\beta = \beta_{\text{pc}} = -0.393$ , демонстрирующие более сильное затухание коротковолновых гармоник в mSGN-схеме, но более узкую область ее устойчивости при оптимальном значении  $\beta_{\text{pc}}$ , чем при выборе для схемы оптимального значения  $\beta = -0.2$  mSGN-модели. Для этого же частного случая ( $\delta = 2, \theta = 0$ ) на рис. 6 изображены поверхности функции  $\Phi = \Phi(\xi, \beta)$  изменения фазы за один шаг по времени множителя

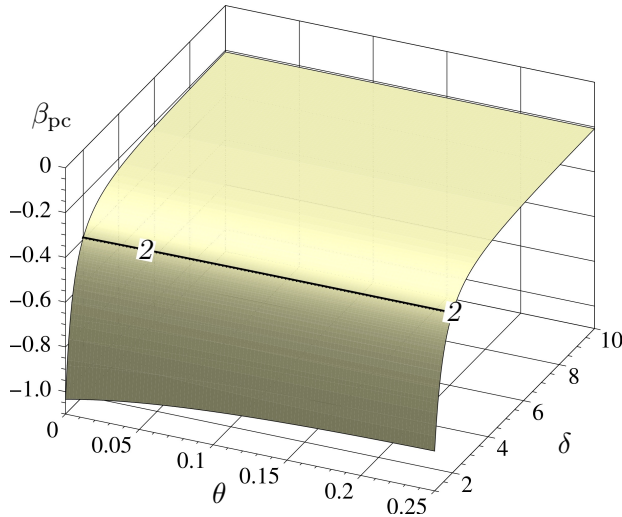


Рис. 5. Оптимальные значения параметра  $\beta_{pc}(\theta, \delta)$  схемы предиктор-корректор для mSGN-модели при  $c_0 a \varepsilon = 1/\sqrt{1+3\theta}$ . Изолиния 2 соответствует значению  $\delta = 2$

Fig. 5. Optimal values of the parameter  $\beta_{pc}(\theta, \delta)$  of the predictor-corrector scheme for the mSGN model at  $c_0 a \varepsilon = 1/\sqrt{1+3\theta}$ . The isoline 2 corresponds to the value  $\delta = 2$

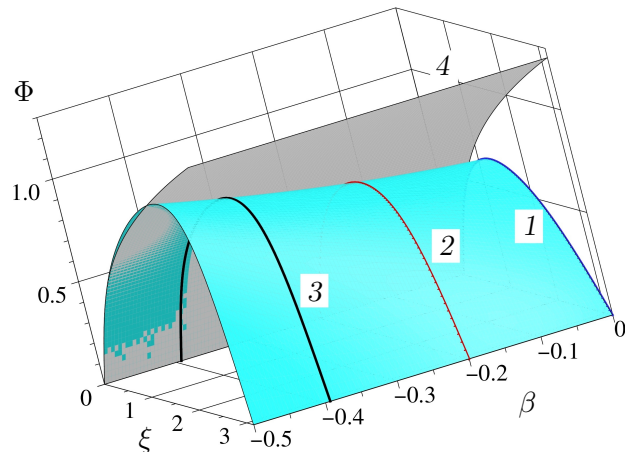


Рис. 6. Изменение фазы  $\Phi = \Phi_{pc}(\xi, \beta)$  множителя перехода схемы предиктор-корректор при  $\theta = 0$ ,  $c_0 a \varepsilon = 1$ ,  $\delta = 2$ . Кривые 1–3 соответствуют значениям  $\beta = 0, -0.2, -0.393$ ; 4 — график изменения фазы  $\Phi = \Phi_{ref}(\xi)$  оператора перехода FNPF-модели

Fig. 6. Phase change  $\Phi = \Phi_{pc}(\xi, \beta)$  of the predictor-corrector scheme transition factor at  $\theta = 0$ ,  $c_0 a \varepsilon = 1$ ,  $\delta = 2$ . Curves 1–3 correspond to the values  $\beta = 0, -0.2, -0.393$ ; (4) — graph of the phase change  $\Phi = \Phi_{ref}(\xi)$  of the transition operator of the FNPF model

перехода mSGN-схемы и оператора перехода “эталонной” FNPF-модели. Оценки показывают, что в области длинных волн ( $\xi \leq \pi/2$ ) наименьшее отклонение от “эталонной” фазы достигается при  $\beta = -0.393$  (кривая 3) и это отклонение существенно меньше, чем при использовании SGN-схемы ( $\beta = 0$ , кривая 1) или mSGN-схемы с параметром  $\beta = -0.2$  (кривая 2), который является оптимальным для mSGN-модели.

## Заключение

Анализ результатов, полученных в настоящей работе и недавних статьях [12–15], позволяет сделать следующие выводы. Модель Серре–Грина–Нагди (SGN-модель) второго (относительно параметра дисперсии  $\mu$ ) длинноволнового приближения допускает модификацию (mSGN-модель), которая обладает улучшенными фазовыми характеристиками за счет того, что дисперсионное соотношение новой модели с повышенным (четвертым) порядком точности приближает дисперсионное соотношение “эталонной” модели потенциальных течений жидкости со свободной границей. Аналогичная модификация для модели четвертого длинноволнового приближения приводит к повышению точности дисперсионного соотношения вплоть до восьмого порядка. Модифицированные модели точнее, чем SGN-модель, описывают характеристики “эталонной” модели в случае горизонтального дна, а в случае неровного дна — изменение фазовой скорости,

амплитуды, длины и крутизны поверхностных волн при их движении из глубоководной части акватории в мелководную.

Подходы, применявшиеся ранее [10, 11, 23] для построения и исследования численных алгоритмов решения SGN-уравнений, можно использовать и для моделей повышенной точности. В настоящей работе такая возможность продемонстрирована на примере mSGN-схемы — разностной схемы типа предиктор-корректор для одномерной mSGN-модели. Условие устойчивости этой схемы допускает использование чисел Куранта, превышающих единицу, тогда как для аналогичной разностной схемы в случае бездисперсионных уравнений мелкой воды число Куранта меньше единицы. Условие устойчивости mSGN-схемы по сравнению с условием для схемы, аппроксимирующей SGN-уравнения, является более ограничительным, однако по свойству подавления коротковолновых гармоник предпочтительнее mSGN-схема. Существуют значения параметров mSGN-схемы, при которых “схемная” дисперсия не подавляет дисперсию mSGN-модели. В частных случаях метод первого дифференциального приближения позволяет получать условия устойчивости mSGN-схемы, совпадающие с выведенными с помощью необходимого спектрального признака, однако для совпадения в общем случае надо, по-видимому, использовать дифференциальные приближения более высокого порядка [31, 32]. Представляется возможным распространить использованные здесь подходы для исследования схемы предиктор-корректор, аппроксимирующей уравнения плановой mSGN-модели.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ФИЦ ИВТ.

## Список литературы

- [1] **Stoker J.J.** Water waves. The mathematical theory with applications. N.Y.: Interscience Publishers; 1957: 568.
- [2] **Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И., Ляпидевский В.Ю.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение; 1985: 318.
- [3] **Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во Сибирского отделения Российской академии наук; 2000: 420.
- [4] **Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение; 1983: 175.
- [5] **Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук А.Г., Симонов К.В.** Вычислительный эксперимент в проблеме цунами. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение; 1989: 168.
- [6] **Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Баракхин В.Б., Шокина Н.Ю.** Численное моделирование течений с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН; 2001: 394.
- [7] **Le`Metayer O., Gavrilyuk S., Hank S.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Computational Physics*. 2010; 229(6):2034–2045.
- [8] **Tkachenko S., Gavrilyuk S., Massoni J.** Extended Lagrangian approach for the numerical study of multidimensional dispersive waves: Applications to the Serre–Green–Naghdi equations. *Journal of Computational Physics*. 2023; (477):111901.

- [9] Шокин Ю.И., Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Иерархия моделей гидродинамики длинных поверхностных волн. Доклады Академии наук. 2015; 462(2):168–172.
- [10] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю. Нелинейнодисперсионные модели волновой гидродинамики: уравнения и численные алгоритмы. Новосибирск: Наука; 2017: 456.
- [11] Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O. Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing. Basel: Birkhäuser; 2020: 284.
- [12] Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д. Плановая модель гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. Вычислительные технологии. 2020; 25(5):17–41. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003.
- [13] Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д. Плановая модель волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. II. Четвертый, шестой и восьмой порядки. Вычислительные технологии. 2021; 26(3):4–25. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.002.
- [14] Хакимзянов Г.С., Федотова З.И., Дутых Д. Плановая модель волновой гидродинамики с дисперсионным соотношением повышенной точности. III. Линейный анализ в случае неровного дна. Вычислительные технологии. 2022; 27(2):37–53. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.004.
- [15] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Фазовые и амплитудные характеристики нелинейно-дисперсионных моделей повышенной точности. Прикладная механика и техническая физика. 2023; 64(2):48–63.
- [16] Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л.: Гидрометеиздат; 1977: 310.
- [17] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И. История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики. I. Одномерные модели. Вычислительные технологии. 2015; 20(5):120–156.
- [18] Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Characteristics of finite difference methods for dispersive shallow water equations. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2016; 31(3):149–158.
- [19] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С., Гусев О.И., Шокина Н.Ю. История развития и анализ численных методов решения нелинейно-дисперсионных уравнений гидродинамики. II. Двумерные модели. Вычислительные технологии. 2017; 22(5):73–109.
- [20] Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Gusev O.I., Shokina N.Yu. Finite difference methods for 2D shallow water equations with dispersion. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2019; 34(2):105–117.
- [21] Serre F. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. La Houille Blanche. 1953; (3):374–388.
- [22] Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. Journal of Fluid Mechanics. 1976; (78):237–246.
- [23] Гусев О.И., Шокина Н.Ю., Кутергин В.А., Хакимзянов Г.С. Моделирование поверхностных волн, генерируемых подводным оползнем в водохранилище. Вычислительные технологии. 2013; 18(5):74–90.
- [24] Баутин С.П., Дерябин С.Л. Теоремы существования и единственности для нелинейно-дисперсионных уравнений Грина–Нагди. Вычислительные технологии. 2013; 18(5):3–15.



- [25] Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Уравнения нелинейно-дисперсионной модели мелкой воды на вращающейся сфере и выполнение законов сохранения. Прикладная механика и техническая физика. 2014; 55(3):37–50.
- [26] Kaptsov E.I., Meleshko S.V., Samatova N.F. The one-dimensional Green–Naghdi equations with a time dependent bottom topography and their conservation laws. Physics of Fluids. 2020; 32(123):123607.
- [27] Peregrine D.H. Long waves on a beach. Journal of Fluid Mechanics. 1967; (27):815–827.
- [28] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука; 1968: 592.
- [29] Шокин Ю.И., Яненко Н.Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение; 1985: 364.
- [30] Shokin Yu.I., Sergeeva Yu.V., Khakimzyanov G.S. Predictor-corrector scheme for the solution of shallow water equations. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2006; 21(5):459–479.
- [31] Shokin Yu., Winnicki I., Jasinski J., Pietrek S. High order modified differential equation of the Beam-Warming method, I. The dispersive features. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2020; 35(2):83–94.
- [32] Shokin Yu., Winnicki I., Jasinski J., Pietrek S. High order modified differential equation of the Beam-Warming method, II. The dissipative features. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2020; 35(3):175–185.

**Nonlinear-dispersive models of wave hydrodynamics: hierarchy of models, high accuracy, numerical algorithms**

FEDOTOVA ZINAIDA I.\*, KHAKIMZYANOV GAYAZ S.

Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Fedotova Zinaida I., e-mail: [zf@ict.nsc.ru](mailto:zf@ict.nsc.ru)

Received April 04, 2023, revised April 20, 2023, accepted April 27, 2023.

**Abstract**

The article presents the results of a study of nonlinear dispersion (NLD) models and numerical methods for their implementation from the standpoint of a hierarchical approach, which allows formulating chains of “shallow water” models, the derivation of which starts from the fully nonlinear equations with dispersion and moves towards simplified models with inheritance of the most important properties.

This study addresses the Serre–Green–Naghdi (SGN) model of the second long-wavelength approximation  $O(\mu^2)$ , the modification of which allows obtaining a new mSGN model with improved phase characteristics due to the increased fourth order accuracy that approximates the dispersion relation of the “reference” model of potential fluid flows with a free boundary. A similar modification for the model of the fourth long-wavelength approximation  $O(\mu^4)$  leads to the increase in the accuracy of the dispersion relation up to the eighth order. Note that the order of approximations is understood to be the exponent of the long-wavelength parameter  $O(\mu^n)$ , where  $\mu = d/\lambda$ ,  $d$  and  $\lambda$  are the average values of the depth of the water area and the wavelength, respectively.

The paper shows that the modified models describe the characteristics of the “reference” model in the case of a horizontal bottom more accurately than the SGN model, as along with the change in phase velocity, amplitude, length and steepness of surface waves as they move from the deep part of the water area to the shallow water in the case of uneven bottom.

Previous approaches to construct and study numerical algorithms for solving SGN equations can also be used for models of increased accuracy. In this paper, we demonstrated that a predictor-corrector difference scheme approximating a one-dimensional mSGN model realizes this possibility. It is shown that the stability condition for this scheme allows using Courant numbers greater than one, while for a similar difference scheme in the case of dispersionless shallow water equations, the Courant number is less than one. The stability condition for the mSGN scheme is more restrictive than the condition for the scheme approximating the SGN equations, but the mSGN scheme is preferable in terms of the suppression of shortwavelength harmonics. It is also shown that there are values of the mSGN scheme parameters for which the dispersion of the difference scheme does not suppress the dispersion of the mSGN model.

*Keywords:* long surface waves, uneven bottom, nonlinear dispersion equations, hierarchy of models, dispersion relation, phase velocity, Green law, analysis of dissipation and dispersion of difference schemes.

*Citation:* Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. Nonlinear-dispersive models of wave hydrodynamics: hierarchy of models, high accuracy, numerical algorithms. Computational Technologies. 2023; 28(3):41–59. DOI:10.25743/ICT.2023.28.3.004. (In Russ.)

**Acknowledgements.** The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation for FRC ICT.

## References

1. **Stoker J.J.** Water waves. The mathematical theory with applications. N.Y.: Interscience Publishers; 1957: 568.
2. **Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I., Lyapidevsky V.Yu.** Nelineynye problemy teorii poverkhnostnykh i vnutrennikh voln [Nonlinear problems in the theory of surface and internal waves]. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie; 1985: 318. (In Russ.)
3. **Lyapidevsky V.Yu., Teshukov V.M.** Matematicheskie modeli rasprostraneniya dlinnykh voln v neodnorodnoy zhidkosti [Mathematical models of long wave propagation in an inhomogeneous liquid]. Novosibirsk: Izd-vo Sibirskogo otdeleniya Rossiyskoy akademii nauk; 2000: 420. (In Russ.)
4. **Marchuk A.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln tsunami [Numerical simulation of tsunami waves]. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie; 1983: 175. (In Russ.)
5. **Shokin Yu.I., Chubarov L.B., Marchuk A.G., Simonov K.V.** Vychislitel'nyy eksperiment v probleme tsunami [Computational experiment in the tsunami problem]. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie; 1989: 168. (In Russ.)
6. **Khakimzyanov G.S., Shokin Yu.I., Barakhnin V.B., Shokina N.Yu.** Chislennoe modelirovanie techeniy s poverkhnostnymi volnami [Numerical simulation of fluid flows with surface waves]. Novosibirsk: Publishing house of SO RAN; 2001: 394. (In Russ.)
7. **Le`Metayer O., Gavrilyuk S., Hank S.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. Journal of Computational Physics. 2010; 229(6):2034–2045.
8. **Tkachenko S., Gavrilyuk S., Massoni J.** Extended Lagrangian approach for the numerical study of multidimensional dispersive waves: Applications to the Serre–Green–Naghdi equations. Journal of Computational Physics. 2023; (477):111901.
9. **Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Hierarchy of nonlinear models of the hydrodynamics of long surface waves. Doklady Physics. 2015; 60(5):224–228.
10. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Shokina N.Yu.** Nelineynodispersionnye modeli volnovoy gidrodinamiki: uravneniya i chislennyye algoritmy [Nonlinear dispersive models of wave hydrodynamics: equations and numerical algorithms]. Novosibirsk: Nauka; 2017: 456. (In Russ.)
11. **Khakimzyanov G., Dutykh D., Fedotova Z., Gusev O.** Dispersive shallow water waves. Theory, modeling, and numerical methods. Lecture Notes in Geosystems Mathematics and Computing. Basel: Birkhäuser; 2020: 284.

12. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D.** Two-dimensional model of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. *Computational Technologies*. 2020; 25(5):17–41. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.003. (In Russ.)
13. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D.** Two-dimensional model of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. II. Fourth, sixth and eighth orders. *Computational Technologies*. 2021; 26(3):4–25. DOI:10.25743/ICT.2021.26.3.002. (In Russ.)
14. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Dutykh D.** Two-dimensional models of wave hydrodynamics with high accuracy dispersion relation. III. Linear analysis for an uneven bottom. *Computational Technologies*. 2022; 27(2):37–53. DOI:10.25743/ICT.2022.27.2.004. (In Russ.)
15. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Phase and amplitude characteristics of higher-accuracy nonlinear dispersive models. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023; 64(2):216–229.
16. **Voltsinger N.E., Pyaskovsky R.V.** *Teoriya melkoy vody. Okeanologicheskie zadachi i chislennyye metody* [Theory of shallow water. Oceanological problems and numerical methods]. Leningrad: Gidrometeoizdat; 1977: 310. (In Russ.)
17. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I.** History of the development and analysis of numerical methods for solving nonlinear dispersive equations of hydrodynamics. I. Onedimensional models problems. *Computational Technologies*. 2015; 20(5):120–156. (In Russ.)
18. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Characteristics of finite difference methods for dispersive shallow water equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2016; 31(3):149–158.
19. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Gusev O.I., Shokina N.Yu.** History of the development and analysis of numerical methods for solving nonlinear dispersive equations of hydrodynamics. II. Two-dimensional models. *Computational Technologies*. 2017; 22(5):73–109. (In Russ.)
20. **Khakimzyanov G.S., Fedotova Z.I., Gusev O.I., Shokina N.Yu.** Finite difference methods for 2D shallow water equations with dispersion. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2019; 34(2):105–117.
21. **Serre F.** Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille Blanche*. 1953; (3):374–388.
22. **Green A.E., Naghdi P.M.** A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *Journal of Fluid Mechanics*. 1976; (78):237–246.
23. **Gusev O.I., Shokina N.Yu., Kutergin V.A., Khakimzyanov G.S.** Numerical modelling of surface waves generated by underwater landslide in a reservoir. *Computational Technologies*. 2013; 18(5):74–90. (In Russ.)
24. **Bautin S.P., Deryabin C.L.** Existence and uniqueness theorems for nonlinear-dispersive Green–Naghdi equations. *Computational Technologies*. 2013; 18(5):3–15. (In Russ.)
25. **Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S.** Nonlinear-dispersive shallow water equations on a rotating sphere and conservation laws. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014; 55(3):404–416.
26. **Kaptsov E.I., Meleshko S.V., Samatova N.F.** The one-dimensional Green–Naghdi equations with a time dependent bottom topography and their conservation laws. *Physics of Fluids*. 2020; 32(123):123607.
27. **Peregrine D.H.** Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*. 1967; (27):815–827.
28. **Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N.** *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of quasilinear equations and their application to gas dynamics]. Moscow: Nauka; 1968: 592. (In Russ.)
29. **Shokin Yu.I., Yanenko N.N.** Method of differential approximation. Application to gas dynamics. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie; 1985: 364. (In Russ.)
30. **Shokin Yu.I., Sergeeva Yu.V., Khakimzyanov G.S.** Predictor-corrector scheme for the solution of shallow water equations. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2006; 21(5):459–479.
31. **Shokin Yu., Winnicki I., Jasinski J., Pietrek S.** High order modified differential equation of the Beam-Warming method, I. The dispersive features. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2020; 35(2):83–94.
32. **Shokin Yu., Winnicki I., Jasinski J., Pietrek S.** High order modified differential equation of the Beam-Warming method, II. The dissipative features. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*. 2020; 35(3):175–185.